

# Modelado y Control de un Mecanismo Tipo Péndulo Invertido Esférico

O. Alvarado, R. Campa y J. Ollervides

División de Estudios de Posgrado e Investigación  
Instituto Tecnológico de La Laguna

Blvd. Revolución y Cuauhtémoc, Torreón, Coah., 27000, México  
e-mail: recampa@ieee.org, fax: (871) 705-1326

**Resumen**—En este artículo se describe el modelado y control de un prototipo mecatrónico tipo péndulo invertido, el cual está compuesto por un péndulo esférico y un mecanismo con cuatro eslabones móviles y dos actuadores. Para simplificar el análisis de tal sistema se restringe el movimiento del péndulo esférico a una región en la que puede verse como dos péndulos simples desacoplados. Se obtienen los modelos no lineales de cada componente y posteriormente se obtiene un modelo lineal del sistema completo. El funcionamiento del prototipo se evalúa experimentalmente utilizando un controlador PD lineal.

**Palabras clave:** Péndulo invertido esférico, mecanismo de cinco barras, modelado dinámico, control PD.

## I. INTRODUCCIÓN.

Uno de los problemas que constituyen un reto desde el punto de vista teórico, y que es capaz de llamar la atención incluso de personas sin experiencia en el campo del control automático, es el balanceo de un péndulo invertido. Las principales razones de su popularidad son sus características de no linealidad e inestabilidad, incertidumbre en términos de fricción, carencia de estados medibles y la facilidad para introducir perturbaciones al sistema. Asimismo, el péndulo invertido es representativo de otros problemas de control automático, tal como el funcionamiento de un cohete espacial o el de una grúa con carga colgante.

Un péndulo invertido es, en términos generales, un péndulo cuya masa está concentrada por encima de su punto de pivote. Debido a la fuerza de gravedad, un péndulo tiene dos equilibrios: uno estable cuando la varilla se encuentra en posición vertical apuntando hacia abajo y uno inestable cuando la varilla apunta hacia arriba. Aunque existe un número considerable de sistemas basados en péndulos invertidos, todos ellos tienen un objetivo de control similar: llevar el centro de masa del péndulo a su equilibrio inestable y/o mantenerlo ahí a pesar de perturbaciones externas.

Entre los sistemas tipo péndulo invertido más comunes se encuentran:

- El sistema *carro-péndulo*, mostrado en la figura 1, el cual consiste en una varilla rígida unida mediante un pivote a un carro con un movimiento horizontal.
- El péndulo invertido rotacional, conocido también como *péndulo de Furuta*, por su creador (Furuta et

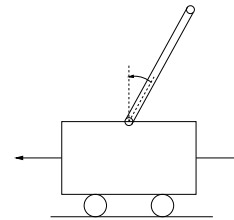


Figura 1. Sistema carro-péndulo.

al., 1992), consiste en un péndulo invertido sobre un brazo rotatorio que se mueve en un plano horizontal, tal como se muestra en la figura 2.

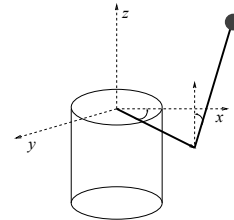


Figura 2. Péndulo de Furuta.

- El *péndulo con rueda inercial* (Spong et al., 2001) mostrado en la figura 3, consiste en un péndulo con una rueda de gran inercia al final de la varilla. El péndulo no está actuado y el sistema tiene que ser controlado mediante el giro de la rueda.

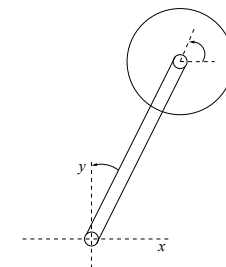


Figura 3. Péndulo con rueda inercial.

- El *pendubot* y el *acrobot* son robots planares subactuados de dos eslabones con articulaciones rotatorias;

la diferencia entre ambos es que en el pendubot el actuador está en la primera articulación, mientras que en el acrobot está en la segunda (ver figura 4).

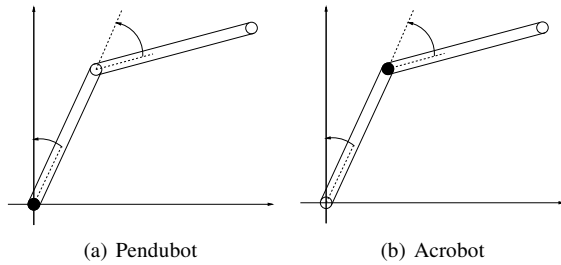


Figura 4. Péndulos invertidos planares con dos eslabones.

- El *péndulo invertido esférico* (Yang et al, 2000), mostrado en la figura 5, está formado por una varilla delgada montada en una articulación universal que puede moverse libremente en el plano horizontal.

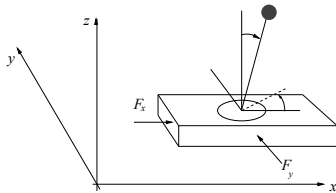


Figura 5. Péndulo invertido esférico.

La compañía Quanser se ha dedicado en los últimos años a desarrollar prototipos didácticos para control. Uno de estos prototipos es justamente un péndulo invertido esférico que utiliza un mecanismo subactuado de cuatro barras móviles para desplazar la base del péndulo. En (Quanser, 2010a) se puede encontrar información sobre este prototipo y otros de la misma compañía.

Los objetivos de este trabajo son: 1) Describir la construcción de un mecanismo tipo péndulo invertido esférico, basado en el prototipo de Quanser. 2) Obtener el modelo dinámico lineal del sistema completo a partir de los subsistemas que lo conforman. 3) Probar el funcionamiento del sistema mediante un control PD lineal.

## II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA.

Como ya se mencionó, el mecanismo construido está basado en el prototipo *2DOF Inverted Pendulum* de la compañía Quanser. Consta en una base fija con dos actuadores, sobre los cuales está montado un mecanismo de cuatro eslabones móviles que, a su vez, soporta la articulación universal del péndulo esférico. Tanto el mecanismo de cuatro eslabones como la articulación universal fueron comprados a la compañía Quanser y corresponden a los artículos *2-DOF Robot* (Quanser, 2010b) y *2-DOF Joint* (Quanser, 2010c), respectivamente, del catálogo de Quanser.

Dos servomotores de CD con reductores de velocidad, modelo 2224U006SR de *Micromo*, fueron empleados para

transmitir potencia al mecanismo. Estos motores se controlan usando servoamplificadores BE15A8 de *Advanced Motion Controls*, que entregan al motor una señal de voltaje modulada por ancho de pulso (PWM). Se utilizaron dos filtros FC10100 del mismo fabricante para incrementar la inductancia de los motores y hacerlos compatibles con los servoamplificadores. Se mandó construir una base de aluminio en la que se montaron los servomotores. La figura

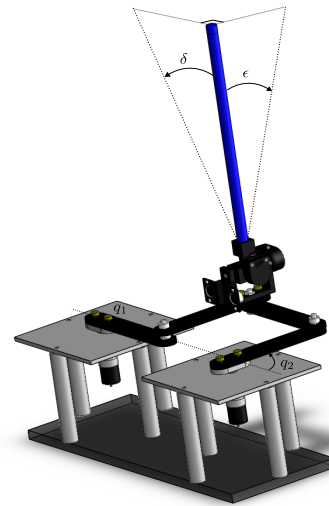


Figura 6. Mecanismo tipo péndulo invertido esférico del ITL.

El sistema completo posee cuatro grados de libertad, los cuales son: la posición de la base móvil en el plano horizontal  $(x, y)$ , la cual es determinada por medio de los ángulos  $q_1$  y  $q_2$ , y los ángulos  $\delta$  y  $\epsilon$  que dan la inclinación de la varilla (ver figura 6). Codificadores ópticos se usan para medir el desplazamiento angular de los actuadores y la inclinación de la varilla.

La base del péndulo esférico está montada sobre un mecanismo de cuatro eslabones móviles (mejor conocido como *mecanismo de cinco barras*). Este tipo de mecanismo ha sido objeto de numerosos estudios (ver, por ejemplo, (Mundo et al., 2008)) debido a su relativa simplicidad y a la riqueza matemática que ofrece su análisis.

Un esquema del mecanismo de cinco barras, incluyendo sus elementos característicos, se muestra en la figura 7. Si  $\rho = [q_1 \ q_2 \ \beta_1 \ \beta_2 \ x \ y]^T$  es el vector de coordenadas generalizadas del mecanismo de cinco barras, entonces su configuración de referencia (casa) es:

$$\rho^* = [0 \ \frac{\pi}{2} \ \frac{\pi}{2} \ \pi \ L \ L]^T \quad (1)$$

que es la que se muestra en la figura 6. En tal configuración el ángulo  $\delta$  se encuentra en el plano XZ y  $\epsilon$  en el plano YZ. Los parámetros del mecanismo de cinco barras y del péndulo esférico utilizados fueron tomados de (Quanser, 2010b) y (Quanser, 2010c), y se muestran en la Tabla I. Por simplicidad, se supondrá que el centro de masa (c.m.) de cada eslabón se encuentra en su punto medio.

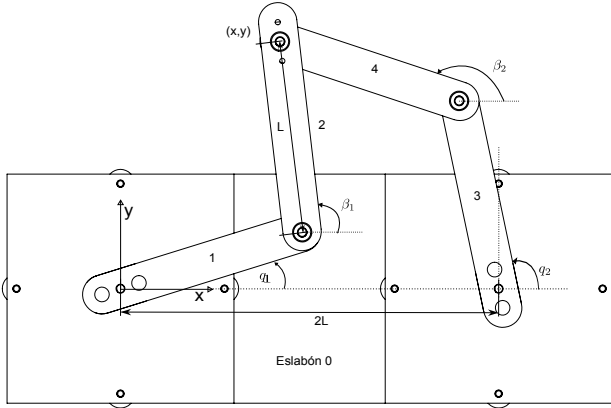


Figura 7. Mecanismo de cinco barras.

 TABLA I  
 PARÁMETROS DEL MECANISMO TIPO PÉNDULO INVERTIDO.

Descripción	Símbolo	Valor [Unidad]
Masa de cada eslabón	$m$	0.127 [kg]
Longitud de cada eslabón	$L$	0.127 [m]
Inercia del eslabón respecto al c.m.	$I$	$8.74E^{-5}$ [kg m <sup>2</sup> ]
Masa de la plataforma móvil	$M$	0.300 [kg]
Masa del péndulo	$m_p$	0.127 [kg]
Distancia al c.m. del péndulo	$l_p$	0.3048 [m]

### III. MODELADO DINÁMICO

El modelo dinámico de un sistema mecánico sin fricción puede ser obtenido en forma general como:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\tau}_\rho + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\boldsymbol{\tau}_\rho$  es el vector de fuerzas aplicadas, el lagrangiano  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del mecanismo. El último término de la ecuación (2) se emplea únicamente cuando hay restricciones holonómicas, de la forma  $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ , que relacionan las coordenadas generalizadas, reduciendo el número de grados de libertad del sistema; por otra parte,  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange que asegura que las restricciones se cumplan.

La ecuación (2) se puede reescribir también como:

$$M(\boldsymbol{\rho})\ddot{\boldsymbol{\rho}} + C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\tau}_\rho + D(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3)$$

donde  $M(\boldsymbol{\rho})$  es la matriz de inercias,  $C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  es la matriz de pares centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho})$  es el vector de pares gravitacionales y  $D(\boldsymbol{\rho})$  es la matriz jacobiana de las restricciones del sistema.

#### III-A. Mecanismo de cinco barras.

Como ya se mencionó, para describir el mecanismo de cinco barras se considera el siguiente vector de coordenadas:

$$\boldsymbol{\rho} = [\mathbf{q}^T \quad \boldsymbol{\beta}^T \quad \mathbf{x}^T]^T \in \mathbb{R}^6$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T$  son las coordenadas actuadas,  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2]^T$  son las coordenadas pasivas y  $\mathbf{x} = [x \quad y]^T$

son las coordenadas cartesianas de la plataforma móvil del mecanismo de cinco barras, que a su vez es la base del péndulo esférico (véanse figuras 6 y 7). Esas coordenadas no son independientes, sino que están sujetas a las siguientes restricciones, dadas por la cinemática del mecanismo:

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} L \cos(q_1) + L \cos(\beta_1) - x \\ 2L + L \cos(q_2) + L \cos(\beta_2) - x \\ L \sin(q_1) + L \sin(\beta_1) - y \\ L \sin(q_2) + L \sin(\beta_2) - y \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Las matrices  $M(\boldsymbol{\rho})$  y  $C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  del mecanismo de cinco barras son:

$$M(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & M_{24} & 0 & 0 \\ M_{31} & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{42} & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix},$$

donde:

$$M_{11} = M_{22} = I + \frac{5}{4}mL^2,$$

$$M_{33} = M_{44} = I + \frac{1}{4}mL^2,$$

$$M_{13} = M_{31} = \frac{1}{2}mL^2 \cos(q_1 - \beta_1),$$

$$M_{24} = M_{42} = \frac{1}{2}mL^2 \cos(q_2 - \beta_2),$$

$$M_{55} = M_{66} = m + M,$$

y

$$C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde:

$$C_{13} = \frac{1}{2}mL^2 \sin(q_1 - \beta_1)\dot{\beta}_1,$$

$$C_{24} = \frac{1}{2}mL^2 \sin(q_2 - \beta_2)\dot{\beta}_2,$$

$$C_{31} = -\frac{1}{2}mL^2 \sin(q_1 - \beta_1)\dot{q}_1,$$

$$C_{42} = -\frac{1}{2}mL^2 \sin(q_2 - \beta_2)\dot{q}_2.$$

Como el movimiento del mecanismo de cinco barras está restringido al plano horizontal,  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ . El vector de pares generalizados es  $\boldsymbol{\tau}_\rho = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  y la matriz  $D(\boldsymbol{\rho})$  es:

$$D(\boldsymbol{\rho}) = L \begin{bmatrix} \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) \\ -\sin(\beta_1) & 0 & \cos(\beta_1) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta_2) & 0 & \cos(\beta_2) \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}^T. \quad (5)$$

Por otra parte, en (García-Gamez et al., 2009) se describe como se puede usar una matriz  $R(\rho)$  tal que

$$\dot{\rho} = R(\rho)\dot{q} = \frac{\partial \rho(q)}{\partial q} \dot{q} \quad (6)$$

para eliminar el último término de (3) y llegar a una expresión de la forma:

$$\bar{M}(\rho)\ddot{q} + \bar{C}(\rho, \dot{\rho})\dot{q} + \bar{g}(\rho) = \tau_q \quad (7)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\rho) &= R(\rho)^T M(\rho) R(\rho) \\ \bar{C}(\rho, \dot{\rho}) &= R(\rho)^T M(\rho) \dot{R}(\rho) + R(\rho)^T C(\rho, \dot{\rho}) R(\rho) \\ \bar{g}(\rho) &= R(\rho)^T g(\rho) \\ \tau_q &= R(\rho)^T \tau_\rho \end{aligned}$$

Para el mecanismo de cinco barras estudiado se obtiene

$$R(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\sin(q_1 - \beta_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} & \frac{\sin(q_2 - \beta_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \\ -\frac{\sin(q_1 - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} & \frac{\sin(q_2 - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \\ \frac{L \sin(q_1 - \beta_1) \sin(\beta_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} & -\frac{L \sin(q_2 - \beta_2) \sin(\beta_1)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \\ -\frac{L \cos(\beta_2) \sin(q_1 - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} & \frac{L \cos(\beta_1) \sin(q_2 - \beta_2)}{\sin(\beta_1 - \beta_2)} \end{bmatrix}$$

y se puede demostrar que  $R(\rho)^T D(\rho)^T = 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

### III-B. Péndulo invertido esférico.

Para el péndulo esférico se define el siguiente vector de coordenadas generalizadas:

$$\rho_p = [x^T \quad \zeta^T]^T \in \mathbb{R}^4.$$

donde  $x$  se usó en el mecanismo de cinco barras, y  $\zeta = [\delta \quad \epsilon]^T$ ; el subíndice  $p$  se usará en esta subsección para distinguir de las ecuaciones obtenidas anteriormente. Dado que en este caso no hay restricciones holonómicas, el modelo dinámico queda

$$M_p(\rho_p)\ddot{\rho}_p + C(\rho_p, \dot{\rho}_p)\dot{\rho}_p + g(\rho_p) = \tau_p$$

con las matrices:

$$M_p(\rho_p) = \begin{bmatrix} M_{p11} & 0 & M_{p13} & 0 \\ 0 & M_{p22} & M_{p23} & M_{p24} \\ M_{p31} & M_{p32} & M_{p33} & 0 \\ 0 & M_{p42} & 0 & M_{p44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{p11} &= M_{p22} = M + m_p, \\ M_{p13} &= M_{p31} = m_p l_p \cos(\delta), \\ M_{p23} &= M_{p32} = -m_p l_p \sin(\delta) \sin(\epsilon), \\ M_{p24} &= M_{p42} = m_p l_p \cos(\delta) \cos(\epsilon), \\ M_{p33} &= m_p l_p^2, \\ M_{p44} &= m_p l_p^2 \cos(\delta)^2, \end{aligned}$$

$$C_p(\rho_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{p13} & 0 \\ 0 & 0 & C_{p23} & C_{p24} \\ 0 & 0 & 0 & C_{p34} \\ 0 & 0 & C_{p43} & C_{p44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} C_{p13} &= -m_p l_p \sin(\delta) \dot{\delta}, \\ C_{p23} &= -m_p l_p \left[ \sin(\delta) \cos(\epsilon) \dot{\epsilon} + \cos(\delta) \sin(\epsilon) \dot{\delta} \right], \\ C_{p24} &= -m_p l_p \left[ \sin(\delta) \cos(\epsilon) \dot{\delta} + \cos(\delta) \sin(\epsilon) \dot{\epsilon} \right], \\ C_{p34} &= m_p l_p^2 \sin(\delta) \cos(\delta) \dot{\epsilon}, \\ C_{p43} &= -m_p l_p^2 \sin(\delta) \cos(\delta) \dot{\epsilon}, \\ C_{p44} &= -m_p l_p^2 \sin(\delta) \cos(\delta) \dot{\delta}, \end{aligned}$$

$$g_p(\rho_p) = -m_p g l_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\delta) \cos(\epsilon) \\ \cos(\delta) \sin(\epsilon) \end{bmatrix},$$

con  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] la constante de aceleración de gravedad; para fines de análisis, se supondrá que  $\tau_p = [F_x \quad F_y \quad 0 \quad 0]^T$ ; es decir, se supondrá que las entradas al sistema péndulo esférico son las fuerzas, en dirección  $x$  y  $y$ , aplicadas a la plataforma en la base del péndulo. El modelo que se presenta aquí es el mismo obtenido por (Olfati-Saber, 2001).

### III-C. Motores de CD

Dado que en el mecanismo construido se emplean motores de CD con reductores, se debe considerar también la dinámica provocada por los mismos. En (Kelly y Santibáñez, 2003) se menciona que el modelo dinámico simplificado de un motor de este tipo, despreciando la inductancia de armadura, y suponiendo que la velocidad en la flecha del motor es tan pequeña que se puede despreciar también la fuerza contraelectromotriz, puede ser escrito como

$$r^2 J_m \ddot{q} + \tau = r \frac{K_a}{R_a} v \quad (8)$$

donde  $q$  es el desplazamiento angular de la flecha del motor,  $J_m$  la inercia del rotor,  $R_a$  la resistencia de armadura,  $K_a$  la constante de conversión de corriente a par,  $r$  la razón de reducción de engranaje,  $\tau$  el par aplicado al motor y  $v$  el voltaje de entrada.

Para un robot con  $n$  articulaciones, la ecuación (8) se puede escribir en forma compacta como:

$$J \ddot{q} + \tau_q = K v \quad (9)$$

donde, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , se tiene  $J = \text{diag}\{r_i^2 J_{m_i}\}$ , y

$$K = \text{diag} \left\{ \frac{r_i K_{a_i}}{R_{a_i}} \right\}.$$

Sustituyendo (7) en (9) queda

$$[J + \bar{M}] \ddot{q} + \bar{C}(\rho, \dot{\rho}) \dot{q} + \bar{g}(\rho) = K v. \quad (10)$$

Para los motores utilizados en el prototipo se tiene, para  $i = 1, 2$ ,  $J_{m_i} = 0.0027$  [kg m<sup>2</sup>],  $K_{a_i} = 0.00692$  [Nm/A],  $R_{a_i} = 1.94$  [ $\Omega$ ] y  $r_i = 66$ .

#### IV. LINEALIZACIÓN DEL MODELO

Para los fines de este artículo, se decidió utilizar un modelo dinámico linealizado; con este fin se linealizaron por separado cada uno de los modelos no lineales obtenidos, el mecanismo de cinco barras alrededor de su configuración de referencia (1), y el péndulo esférico en la dirección vertical hacia arriba ( $\delta = \varepsilon = 0$ ).

Para la linealización se utilizó la técnica bien conocida del jacobiano (ver, por ejemplo, (Rodríguez, 2003)). En general, un sistema no lineal  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector de estados y  $\mathbf{u}$  es la entrada al sistema, es localmente equivalente, alrededor del punto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$  al sistema lineal dado por:

$$\dot{\mathbf{r}} = A^* \mathbf{r} + B^* \mathbf{u}$$

donde

$$A^* = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^*, \mathbf{u}=0} \quad \text{y} \quad B^* = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^*, \mathbf{u}=0}$$

##### IV-A. Mecanismo de cinco barras

La expresión (10) puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ [J + \bar{M}(\boldsymbol{\rho})]^{-1} [K\mathbf{v} - \bar{C}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\mathbf{q}} - \bar{g}(\boldsymbol{\rho})] \end{bmatrix}$$

de modo que si se toma  $\mathbf{r} = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ , la linealización del sistema alrededor del punto  $\mathbf{r}^* = [\mathbf{q}^{*T}, \mathbf{0}^T]^T$ , con  $\mathbf{q}^*$  dado por (1), queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (11)$$

$$\text{con } a = \frac{rK_a}{R_a[2I + L^2(M + \frac{5}{2}m)]}$$

##### IV-B. Péndulo esférico

Siguiendo un procedimiento similar al indicado arriba, pero ahora tomando  $\mathbf{r} = [\mathbf{x}^T \quad \boldsymbol{\zeta}^T \quad \dot{\mathbf{x}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}}^T]^T$  y  $\mathbf{r}^* = [L \quad L \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  se llega al siguiente modelo lineal para el péndulo esférico:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & bI & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dI \\ eI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{donde } b = -g \frac{m_p}{M}, \quad c = g \frac{M+m_p}{Ml_p}, \quad d = \frac{1}{M} \quad \text{y} \quad e = -\frac{1}{Ml_p}$$

Nótese que la expresión (12) en realidad representa dos sistemas desacoplados, uno en términos de los estados  $[x \quad \delta \quad \dot{x} \quad \dot{\delta}]$  y otro con  $[y \quad \varepsilon \quad \dot{y} \quad \dot{\varepsilon}]$ , dados por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \delta \\ \dot{x} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \delta \\ \dot{x} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ e \end{bmatrix} F_x$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \\ \dot{y} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \\ \dot{y} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ e \end{bmatrix} F_y$$

Estos sistemas representan péndulos invertidos planares desacoplados, moviéndose en planos ortogonales.

#### IV-C. Acoplamiento de los modelos dinámicos.

El acoplamiento entre el mecanismo de cinco barras y el péndulo esférico se da a través de la relación de los voltajes aplicados a los motores  $v_1$  y  $v_2$  con las fuerzas lineales  $F_x$  y  $F_y$ .

Para obtener esa relación se utiliza la derivada temporal de (6), que está dada por:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{R}(\boldsymbol{\rho})\dot{\mathbf{q}} + R(\boldsymbol{\rho})\ddot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

Tomando  $\mathbf{r} = [\boldsymbol{\rho}^T \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}^T]^T$  y considerando  $\ddot{\mathbf{q}}$  como la entrada al sistema, se puede linealizar para la configuración de referencia  $\boldsymbol{\rho}^*$  para obtener:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -L \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Finalmente, utilizando la segunda ley de Newton  $F_x = (M + m_p)\ddot{x}$  y  $F_y = (M + m_p)\ddot{y}$ , por lo que, usando los últimos renglones de (11) y (14) queda:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = a(M + m_p)L \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

#### V. EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

Se realizaron experimentos para probar el desempeño del sistema construido. El objetivo de control consistió en mantener el péndulo esférico en el equilibrio inestable, mientras que el mecanismo de cinco barras se encuentra cerca de su configuración de referencia, esto último con el fin de asegurar el desacoplamiento del sistema debido a la linealización.

Para los experimentos se utilizó un simple controlador PD en cada péndulo desacoplado. Estos controladores puede expresarse en la forma

$$v_1 = -\mathbf{k}_1^T [x \quad \delta \quad \dot{x} \quad \dot{\delta}]^T$$

$$v_2 = -\mathbf{k}_2^T [y \quad \varepsilon \quad \dot{y} \quad \dot{\varepsilon}]^T$$

donde  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  son vectores de ganancias de control.

La interfaz del sistema para realizar el control en tiempo real fue creada utilizando Matlab/Simulink en conjunto con Real Time Windows Target. La comunicación Sistema-Computadora se realizó a través de una tarjeta adquisitora *Sensaray* Modelo 626. El tiempo total del experimento fue de 30 segundos. El periodo de muestreo empleado fue de 1 milisegundo y se utilizó el algoritmo numérico de quinto orden (Dormand-Prince) para obtener las velocidades mediante diferenciación. Debido a lo ruidoso de estas señales, se utilizaron filtros pasa-bajas de segundo orden para obtener una mejor estimación de la velocidad.

Las ganancias utilizadas en los experimentos fueron  $\mathbf{k}_1 = [-3 \quad 40 \quad -1 \quad 1]^T$  y  $\mathbf{k}_2 = [-1 \quad 40 \quad -1 \quad 1.5]^T$ . El prototipo físico utilizado para realizar los experimentos es mostrado en la figura 8.

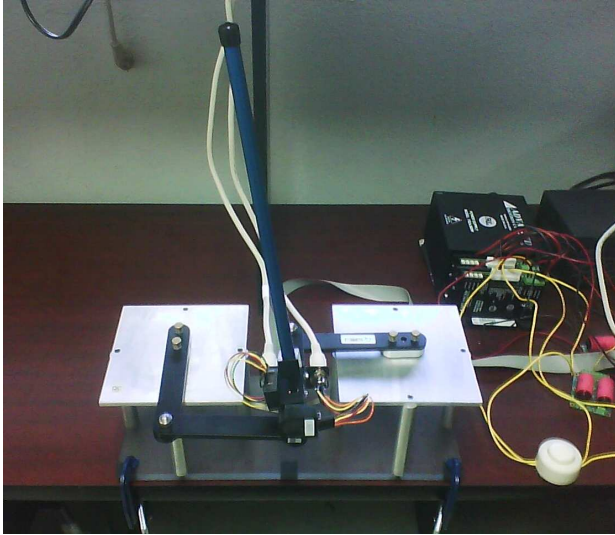


Figura 8. Prototipo físico del Péndulo Invertido.

La figura 9 muestra la acción conjunta de los dos controladores sobre la varilla. El péndulo parte del reposo en el equilibrio inestable. Idealmente, el péndulo debería de permanecer ahí, sin embargo en la práctica esto nunca ocurre. Después de cierto tiempo se alcanza el objetivo de control: la permanencia del péndulo en el punto de equilibrio. Una perturbación externa es aplicada aproximadamente a los 20 segundos para comprobar la robustez del controlador.

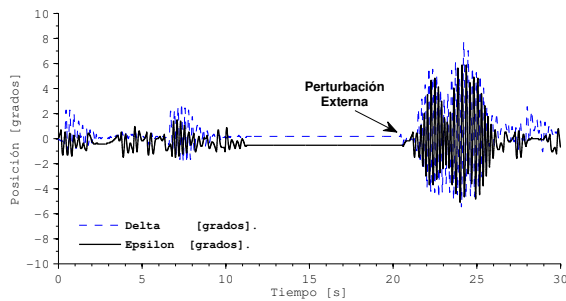


Figura 9. Variables de estado  $\epsilon$  y  $\delta$ .

Los voltajes de control aplicados a los servomotores son mostrados en las figuras 10 y 11. Se observa que se mantienen dentro del rango de operación del motor.

## VI. CONCLUSIONES

Se construyó un mecanismo tipo péndulo invertido, que está basado en un prototipo comercial. Se estudió el modelo dinámico del sistema, analizando por separado el mecanismo de cinco barras sujeto a la base y el péndulo esférico; luego se linealizó cada uno de estos modelos para obtener el modelo completo. Para comprobar el funcionamiento del mecanismo construido, así como la validez del modelo obtenido, se realizaron una serie de experimentos. Los resultados muestran que la aproximación empleada es correcta.

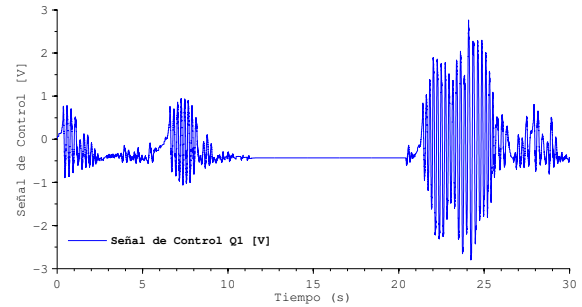


Figura 10. Voltaje de control aplicado al servomotor 1.

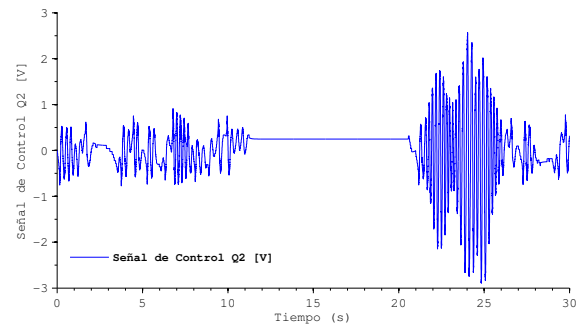


Figura 11. Voltaje de control aplicado al servomotor 2.

## VII. AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por PROMEP, DGEST y CONACYT (proyecto 60230).

## REFERENCIAS

- Furuta K., M. Yamakita y S. Kobayashi (1992). Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 206, no. 6, pp. 263-269.
- García-Gamez C., R. Campa y V. Santibáñez (2009). Análisis de estabilidad de controladores convencionales en robots manipuladores paralelos: Robot 3RRR como caso de estudio. *Memorias del XI Congreso Mexicano de Robotica*, Celaya, Gto., Octubre 2009.
- Kelly R. y V. Santibáñez (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson/Prentice Hall.
- Mundo D., Gatti G., y Dooner D. B. (2009). Optimized five-bar linkages with non-circular gears for exact path generation. *Mechanism and Machine Theory* vol. 44, no. 4, pp. 751-760.
- Olfati-Saber R. (2001) Non-linear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, February 2001.
- Quanser (2010a). Control challenges - Rotary (2 DOF IP). Página web en: [www.quanser.com/english/html/challenges/fs\\_chall\\_rotary\\_flash.htm](http://www.quanser.com/english/html/challenges/fs_chall_rotary_flash.htm)
- Quanser (2010b). 2DOF Robot - User Manual. Technical document.
- Quanser (2010c). 2DOF Joint - User Manual. Technical document.
- Rodríguez L. F. (2003) Diseño de un controlador de estructura variable para el péndulo invertido. Tesis de maestría. Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital. Tijuana B.C., junio 2003.
- Spong, M. W., P. Corke y R. Lozano (2001). Nonlinear control of the inertia wheel pendulum. *Automatica*, vol. 37, pp. 1845-1851.
- Yang R., Y. Kuen y Z. Li (2000). Stabilization of a 2-DOF spherical pendulum on X-Y Table. *Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications*. Anchorage, AK, September 2000.